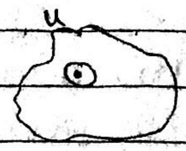
Υπενθύμιση:



$U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό

$:\Leftrightarrow \forall \bar{x} \in U \;\; \exists \varepsilon > 0 \;\; B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$

$\varepsilon(x)$

Το U είναι κλειστό αν το $\mathbb{R}^n \setminus U$ είναι ανοιχτό.

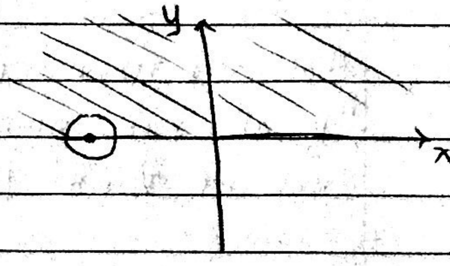
Παρατήρηση:

(α) Τα $\emptyset, \mathbb{R}^n$ είναι και ανοιχτά και κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με αυτή την ιδιότητα.

(β) Δεν είναι όλα τα σύνολα είτε ανοιχτά είτε κλειστά.

π.χ. $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x<0,\ y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y > 0\}$

δεν είναι ούτε ανοιχτό, ούτε κλειστό.



αφού αφενός το $(-1,0) \in U$, κάθε μπάλα $B((-1,0),\varepsilon)$ με $\varepsilon>0$ έχει σημεία εκτός του U

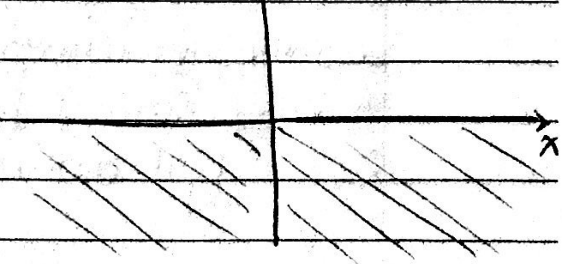
$(\Leftrightarrow B((-1,0),\varepsilon) \cap \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus U)}_{=U^c} \neq \emptyset)$

[ας πάρουμε το σημείο $(-1, -\varepsilon/2) \notin U$]

Άρα U όχι ανοιχτό.

Μήπως κλειστό; Θα έπρεπε τότε το $U^c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ x<0,\ y<0\}$
$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ x \geq 0,\ y \leq 0\}$

να 'ναι ανοιχτό.



Το οποίο ανάλογα με πριν δεν είναι ανοιχτό αφού π.χ. για το $(1,0) \in \mathbb{R}^n \setminus U$ δεν μπορώ να βρω κανένα $\varepsilon>0$ με την ιδιότητα $B((1,0),\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus U$, αφού π.χ. έχουμε $(1, \varepsilon/2) \in B((1,0),\varepsilon) \Leftrightarrow$

$\|(1, \varepsilon/2) - (1,0)\| = \varepsilon/2 < \varepsilon$

αλλά $(1, \varepsilon/2) \notin U^c$

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

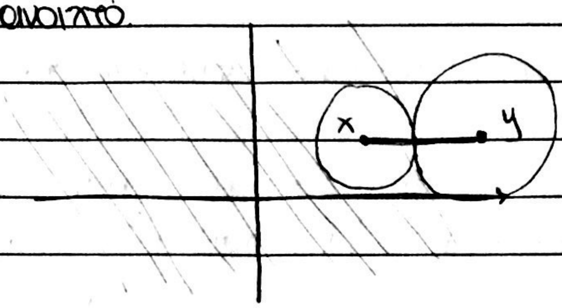
Πρόταση 1.3.1

(α) Κάθε ανοιχτή μπάλα είναι ανοιχτό σύνολο.

(β) Κάθε κλειστή μπάλα είναι κλειστό σύνολο.

[Απόδειξη:

Έστω $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$. Τότε θ.ν.δ.ο. $\bar{B}(\bar{x},r):=\{y\in\mathbb{R}^n \mid \|\bar{x}-\bar{y}\|\le r\}$ είναι κλειστό, δηλ. ότι το $\mathbb{R}^n/\bar{B}(\bar{x},r)=\{\bar{y}\in\mathbb{R}^n \mid \|y-\bar{x}\|<r\}$ είναι ανοιχτό.



Αφού για τυχαίο $\bar{y}\in\mathbb{R}^n\setminus\bar{B}(\bar{x},r)$ υπάρχει $r>0$:

$\|\bar{y}-\bar{x}\|=r+\varepsilon$, υποψιαζόμαστε ότι $B(\bar{y},\varepsilon)\subset\mathbb{R}^n\setminus\bar{B}(\bar{x},r)$

δηλ. ότι $\forall\bar{z}\in\mathbb{R}^n$ με $\|\bar{z}-\bar{y}\|<\varepsilon$: $\|\bar{z}-\bar{x}\|>r$

Αυτό όμως ισχύει αφού (τριγωνική ανισότητα)

$$\|\bar{z}-\bar{x}\| \overset{①}{\geq} \underbrace{\|\bar{y}-\bar{x}\|}_{=r+\varepsilon}-\underbrace{\|\bar{z}-\bar{y}\|}_{<\varepsilon} > r+\varepsilon-\varepsilon=r$$

① → ! ... $\|\bar{y}-\bar{x}\|\le\|\bar{z}-\bar{x}\|+\|\bar{z}-\bar{y}\|=\|\bar{y}-\bar{z}\|+\|\bar{z}-\bar{x}\|=$

$=\bar{y}-\bar{z}+\bar{z}-\bar{x}$

Πρόταση 1.3.2

Η ένωση μιας (οσοδήποτε μεγάλης) οικογένειας ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο και η τομή ενός πεπερασμένου πλήθους ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό.

Απόδειξη: Έστω I μια οικογένεια δεικτών και U_i ανοιχτό $\subset\mathbb{R}^n$

θ.ν.δ.ο. $\bigcup_{i\in I} U_i$ ανοιχτό. Πράγματι

έστω $\bar{x}\in\bigcup_{i\in I}U_i \Rightarrow \exists i_0\in I$. $\bar{x}\in U_{i_0} \Rightarrow \exists\varepsilon>0 : B(\bar{x},\varepsilon)\subset U_{i_0}$

U_{i_0} ανοιχτό $\qquad \subset\bigcup_{i\in I}U_i$

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

Έστω τώρα U_i, $i=1,\dots,k$ $(k\in\mathbb{N})$, ανοιχτοί $\subset\mathbb{R}^n$

Ν.δ.ο. $\bigcap_{i=1}^{k} U_i = U_1\cap U_2\cap\dots\cap U_k$ είναι ανοιχτό.

1η περίπτωση:

$\bigcap_{i=1}^{k} U_i \neq \emptyset$ τότε έστω $\bar{x}\in\bigcap_{i=1}^{k} U_i \Rightarrow \forall i=1,\dots,k : x\in U_i$

$\xRightarrow{U_i \text{ ανοιχτό}} \exists \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k>0$, $B(\bar{x},\varepsilon_i)\subset U_i$

Έστω $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k\}>0$ με $\varepsilon\leq\varepsilon_i$ $\forall i=1,\dots,k$

Τότε $B(\bar{x},\varepsilon)\subset B(\bar{x},\varepsilon_i)$ $\forall i=1,\dots,k$ $\subset U_i \Rightarrow$

$\Rightarrow B(\bar{x},\varepsilon)\subset\bigcap_{i=1}^{k} U_i$ $\boxtimes$

Ερώτηση: Γιατί είναι πλήθος να παίρνουμε τομή από μη πεπερασμένο πλήθος ανοικτών όταν θέλουμε η τομή τους να 'ναι ανοιχτή;

Αν η τομή είναι κενή, κανένα πρόβλημα.

Αν » » μη κενή και έχει πχ μόνο ένα στοιχείο δηλ. η τομή των U_i να 'ναι μόνο ένα x, τότε αυτή δεν είναι ανοιχτή (*)

(*) Για να 'ναι ανοιχτή θα πρέπει $\forall \bar{y}\in\{\bar{x}\}$, $\exists\varepsilon>0 : B(\bar{y},\varepsilon)\subset\{\bar{x}\}$

δηλ. θα πρέπει να υπάρχει ένα ε: $B(\bar{x},\varepsilon)\subset\{\bar{x}\}$

$$B(\bar{x},\varepsilon)=\{\bar{z}\in\mathbb{R}^n \mid \|\bar{z}-\bar{x}\|<\varepsilon\}$$

πχ $\bar{z}\in\mathbb{R}^n : \|z-x\|=\varepsilon/2$

$\Rightarrow \bar{z}\neq\bar{x}$ [αφού αν $\bar{z}=\bar{x}$, τότε $\|\bar{z}-\bar{x}\|=\|\bar{x}-\bar{x}\|=0\neq\varepsilon/2$]

δηλ. βρίκαμε $z\in B(\bar{x},\varepsilon)$ με $\bar{z}\notin\{\bar{x}\}$.

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner

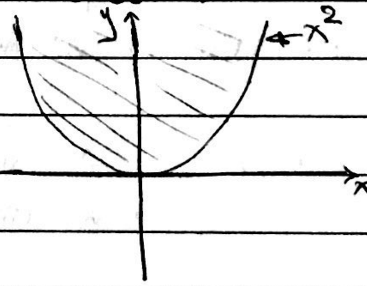
Μια τέτοια άπειρη αριθμήσιμη τομή προκύπτει για οποιοδήποτε $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$, αν θεωρήσουμε τα σύνολα $U_i = B(\bar{x}, \frac{1}{i})$, $i\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$ είναι ανοιχτά και $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} U_i \underset{\text{άσκηση 6}}{=} \{\bar{x}\}$

[$\supseteq$ τετριμμένο, αφού $\bar{x}\in B(\bar{x}, \frac{1}{i})\ \forall i\in\mathbb{N}$]

Πρόταση (Άσκηση)
Η τομή μιας (οσοδήποτε μεγάλης) οικογένειας κλειστών είναι κλειστό, και η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών είναι κλειστό.

Ερώτηση: Βρείτε μια ακολουθία από κλειστά σύνολα, που η ένωση τους δεν είναι κλειστό σύνολο (Άσκηση)

Θέμα εξετάσεων
(α) Βρείτε το εσωτ. σημείο, εξωτ. σύνορο του συνόλου
$U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y > x^2\}$



Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η σφαίρα κέντρου $\bar{x}$, ακτίνας $r>0$ είναι κλειστό σύνολο $\partial B(\bar{x}, r) := \{\bar{y}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| = r\}$

$$= \{\bar{y}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| \overset{\text{κλειστό}}{\le} r\}$$

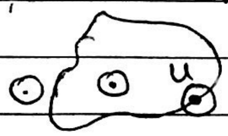
$$\cap \{y\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| \ge r$$

$$\underbrace{= \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{\{y\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| < r\}}_{\text{ανοιχτό (ανοιχτή μπάλα)}}}_{\text{κλειστό (εξ ορισμού)}}$$

Ορισμός 13.2: Ένα $U\subset\mathbb{R}^n$ λέγεται (α) φραγμένο, αν $\exists r>0$, $U\subset B(\bar{0},r)$.
(β) συμπαγές, αν U είναι κλειστό κ' φραγμένο.

$U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0,\ y\geq 0\}$ δεν είναι φραγμένο, δηλ.
(ισχυρισμός) $\nexists\, r>0 : U\subset B(\bar{0},r)$
δηλ. $\forall r>0$ $U\not\subset B(0,r)$, αρκεί π.ν.δ.ο.
$\forall r>0\ \exists (x,y)\in U$ με $\underbrace{(x,y)\notin B(\bar{0},r)}_{\Leftrightarrow \|(x,y)\|\geq r}$
$\Rightarrow$ $(x,y)=(-r,0)$ με $\|(x,y)\|=r$ και $(x,y)\in U$

Ορισμός:
Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ (όχι του U!) λέγεται
(α) εσωτερικό σημείο του U, αν $\exists \varepsilon>0 : B(\bar{x},\varepsilon)\subset U$
$[\Rightarrow x\in U]$
(β) εξωτερικό σημείο του U, αν το x είναι εσωτερικό σημείο του συμπληρώματος. (*)



(γ) συνοριακό σημείο του U, αν το x δεν είναι ούτε εσωτερικό, ούτε εξωτερικό σημείο του U.
(*) δηλ. αν $\exists \varepsilon>0 : B(\bar{x},\varepsilon)\subset\mathbb{R}^n\setminus U$ $[\Rightarrow \bar{x}\notin U]$

Παρατήρηση:
Από τον ορισμό για κάθε $U\subset\mathbb{R}^n$ αυτό διαμερίζει τον $\mathbb{R}^n$ σε τρία ξένα μεταξύ τους υποσύνολα
$\mathbb{R}^n = \mathrm{int}\,U \cup \mathrm{ext}\,U \cup \mathrm{bd}\,U$

http://www.tanenghong.com

Scanned with CamScanner